

## Analytical Radial Part Schrodinger Equation in D-dimensions for Eckart plus Manning Rosen Potential as The Quantum Physics Learning

### ANALISIS PERSAMAAN SCHODINGER DIMENSI-D BAGIAN RADIAL UNTUK POTENSIAL ECKART PLUS MANNING ROSEN SEBAGAI BAHAN PEMBELAJARAN FISIKA KUANTUM

Luqman Hakim<sup>1)</sup>, M. Nawir<sup>2)</sup>

<sup>1,2)</sup> Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Palangkaraya, Jl. Yos Sudarso, Palangkaraya 7311A

e-mail: luqman\_812\_h@yahoo.com

#### ABSTRACT

The aims of the research are to determine energy spectra and radial wave function of Quantum system in D-Dimensions for Eckart plus Manning Rosen potential with Nikiforov-Uvarov method. Nikiforov-Uvarov method is method for solving a second-order of differential equations by transforming the equation into the hypergeometric equation by the method of separation of intermediate variables by appropriate variable substitution. The analytical results is energy spectra and radial wave function visualization by *Microsoft Excel 2010* and *Mathematical Laboratory 2013* Programing. The visualization result can be showed that the orbital quantum number increase and the dimension increase causing the bounding energy decrease in the  $-n$  spectra energy. The probability visualization for ground state condition result can be showed that the orbital increase, so probability decrease, while the dimension increase for ground state condition is decreasing probability.

**Key word:** Schrodinger equation in D-dimension, Eckart plus Manning Rosen Potential, Nikiforov-Uvarov method, Energy spectra, Radial wave function

#### ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan tingkat energi dan fungsi gelombang radial pada sistem kuantum berdimensi-D untuk potensial Eckart *plus* Manning Rosen dengan metode Nikiforov-Uvarov. Metode Nikiforov-Uvarov merupakan metode penyelesaian persamaan diferensial orde kedua dengan mengubah persamaan tersebut menjadi persamaan perantara hipergeometrik dengan metode pemisahan variabel melalui substitusi variabel yang sesuai. Hasil analisis yang berupa tingkat energi dan fungsi gelombang radial divisualisasikan dengan menggunakan pemrograman *Microsoft Excel 2010* pemrograman *Matlab 2013*. Hasil visualisasi menunjukkan semakin besar bilangan kuantum orbital dan semakin besar dimensi secara fisis pada tingkat energy ke-n mengakibatkan ikatan makin melemah. Visualisasi rapat probabilitas menunjukkan bahwa pada kondisi *ground state* semakin besar bilangan kuantum orbital probabilitasnya semakin kecil, sedangkan pengaruh dimensi semakin besar dimensi pada kondisi *ground state* probabilitas ditemukan partikel semakin besar.

**Kata kunci:** Persamaan Schrodinger Dimensi-D, Potensial Eckart plus Manning Rosen, Metode Nikiforov-Uvarov, Tingkat energy, Fungsi gelombang radial

#### I. PENDAHULUAN

##### A. Pengantar Kuantum

Fisika kuantum merupakan salah satu mata kuliah wajib pada program studi pendidikan fisika. Fisika kuantum dipelajari karena fisika (konsep-konsep fisika) klasik memerlukan revisi atau penyempurnaan. Hal ini disebabkan semakin banyaknya hasil-hasil eksperimen dan gejala-gejala

fisika yang tidak bias dijelaskan dengan konsep-konsep fisika yang telah dikuasai pada saat itu (fisika klasik), sekalipun dengan pendekatan. Masalah-masalah yang telah berkembang terutama pada obyek-obyek fisis yang berukuran mikroskopik, seperti partikel-partikel elementer dan atom serta interaksinya dengan radiasi atau medan elektromagnetik. Mekanika kuantum merupakan

dasar untuk pemahaman tentang fenomena fisik pada skala mikroskopik (Siregar, 2010). Mekanika kuantum selalu menggunakan pendekatan yang berbeda untuk menentukan besaran yang terkait dengan gerak partikel yaitu menggunakan fungsi gelombang untuk merpresentasikan dinamika partikel yang bergerak yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrödinger dari partikel yang berkaitan. Persamaan gerak partikel dapat diselesaikan menggunakan persamaan Schrodinger, persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac (Rajabi dan Hamzavi,2013).

Pembelajaran Fisika kuantum tidak terlepas dari pendekatan-pendekatan persamaan matematis. Salah satu persamaan matematis yang digunakan adalah persamaan Schrodinger, dimana persamaan Schrödinger ini merupakan hal mendasar dalam mekanika kuantum, yang mendeskripsikan bagaimana keadaan kuantum (*quantum state*) suatu sistem fisika yang berubah terhadap waktu. Penyelesaian persamaan Schrödinger secara eksak hanya mungkin ketika bilangan orbital  $l = 0$ , sedangkan ketika  $l \neq 0$ , persamaan Schrödinger hanya bisa diselesaikan dengan pendekatan substitusi yang sesuai (Cari dan Suparmi, 2012). Persamaan Schrodinger merupakan persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan keadaan kuantum dari sistem fisis. Penyelesaian persamaan Schrödinger secara eksak pada beberapa potensial dapat diaplikasikan dalam sistem fisika yang sangat penting karena dapat digunakan untuk menentukan fungsi gelombang dan tingkat energi suatu sistem partikel (Ikot dan Akpabio, 2010).

Beberapa metode dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger, antara lain Super Symmetry (SUSY), *confluence hypergeometry*, Romanovsky, dan Nikiforov-Uvarov (Deta et al, 2013). Metode yang sering digunakan saat ini adalah metode Nikiforov Uvarov karena cenderung lebih mudah dibandingkan dengan metode yang lain. Potensial dalam kuantum menggambarkan dinamika partikel di mekanika kuantum. Beberapa contoh potensial dalam mekanika kuantum antara lain osilator harmonik, potensial Coloumb, Rosen Morse, Manning-Rosen, Scarf, Poschl Teller Eckart dan lain-lain (Suparmi,2011). Penelitian ini merupakan penelitian analisis persamaan Schrodinger dimensi-D yang bertujuan untuk mendeskripsikan tingkat energi dan fungsi gelombang radial dari potensial eckart plus Manning Rosen.

## B. Persamaan Schrodinger Dimensi-D

Persamaan Schrodinger dimensi-D didasari dengan penggunaan koordinat polar D-dimensi dengan *hyperspherical coordinates*  $r$  dan  $\theta_D$ . Hubungan antara koordinat kartesian  $x_i$  dengan *hyperspherical coordinates*  $r$  dan  $\theta_D$  dalam dimensi-D didefinisikan sebagai (Dong, 2011):

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \dots \sin \theta_{D-1}, \\x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dots \dots \sin \theta_{D-1}, \\x_b &= r \cos \theta_{b-1} \sin \theta_b \dots \dots \sin \theta_{D-1}, \\x_D &= r \cos \theta_{D-1}\end{aligned}\quad (1)$$

dimana  $D \in [3, D - 1]$ . Penjumlahan masing-masing Persamaan (1) diperoleh :

$$r^2 = \sum_{i=1}^D x_i^2 \quad (2)$$

$r$  merupakan radius dimensi-D dengan komponen koordinat bola. Operator Laplacian dalam koordinat polar didefinisikan sebagai :

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left( \frac{\hbar}{h_k^2} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) \quad (3)$$

Hubungan antara koordinat kartesian  $x_i$  dengan *hyperspherical coordinates*  $r$  dan  $\theta_D$  dalam dimensi-D. Persamaan Schrodinger untuk dimensi-D didefinisikan sebagai (Ikhdair and Sever, 2008):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_D^2 \psi_{(r,\Omega_D)} + V\psi_{(r,\Omega_D)} = E\psi_{(r,\Omega_D)} \quad (4)$$

dengan  $\nabla_D^2$  merupakan operator Laplacian dalam dimensi-D, yaitu :

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L_{D-1}^2}{r^2} \quad (5)$$

Nilai  $L_{D-1}^2 = \Lambda_{D-1}^2(\Omega_D)$  merupakan operator momentum angular dimensi-D, yaitu:

$$\begin{aligned}\Lambda_{D-1}^2(\Omega_D) &= L_k^2 \\ &= \sum_{u < v} L_{uv}^2 \\ &= - \left\{ \frac{1}{\sin^{k-1} \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left( \sin^{k-1} \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) - \frac{L_{k-1}^2}{\sin^2 \theta_k} \right\}\end{aligned}\quad (6)$$

Penyelesaian Persamaan Schrodinger dimensi -D dengan melakukan separasi variabel dengan memisalkan

$$\psi_{nl}(r, \Omega_D) = R_n(r) Y_l^m(\Omega_D) \quad (7)$$

Dengan  $R_n$  adalah bagian radial dari Persamaan (7) dan  $Y_l^m$  adalah bagian sudutnya. Persamaan Schrodinger dimensi-D bagian sudut harus memenuhi Persamaan nilai eigen:

$$\Delta_D^2 Y_l^m(\Omega_D) = l(l+D-2) Y_l^m(\Omega_D) \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (8) ke dalam Persamaan (4) melalui sparasi variabel pada Persamaan (4), maka diperoleh Persamaan :

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{D-1} \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E_n + \frac{l(l+D-2)}{r^2} - V(r) \right] = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_D^2(\Omega_D) Y_l^m(\Omega_D) + V(\Omega_D) Y_l^m(\Omega_D) \\ = l(l+D-2) Y_l^m(\Omega_D) \end{aligned} \quad (10)$$

Persamaan (9) dan Persamaan (10) merupakan Persamaan bagian radial dan Persamaan bagian sudut untuk dimensi-D.

### C. Potensial Eckart plus Manning Rosen

Simetri dan sifat invarian adalah salah satu karakteristik dari setiap sistem fisik. Sifat-sifat tersebut memberikan gambaran sifat fisik dari sistem yang lebih baik, tetapi juga memainkan peran penting dalam sudut pandang matematika. Beberapa contoh dari potensial *shape invariant* adalah *Shifted Oscillator*, *3-D Oscillator*, *Coulomb*, *Morse*, *Scarf II* (hiperbolik), *Rosen- Morse II* (hiperbolik), *Eckart*, *Scarf I* (Trigonometri), *Poschl-Teller*, dan *Rosen- Morse I* (Trigonometri).

Potensial Eckart sering digunakan untuk memperkirakan koreksi tunneling mekanika kuantum untuk konstanta laju kimia teoritis yang ditentukan (Vahidi and Gourdarzi, 2011). Potensial Manning Rosen merupakan model potensial yang digunakan untuk menerangkan tingkah laku getaran molekul antar atom (Hassanabadi et al, 2012).

Kombinasi potensial Eckart dan potensial Manning Rosen secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} V(r, \Omega_D) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{V_0 e^{-r/\alpha}}{(1-e^{-r/\alpha})^2} - \frac{V_1(1+e^{-r/\alpha})}{(1-e^{-r/\alpha})} \right) + \\ \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2} \left( \frac{b^2 + u(u-1)}{s^2 \Omega_D} - \frac{2b(u-\frac{1}{2})c \Omega_D}{s^2 \Omega_D} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

dimana  $0 < r/\alpha < \infty$  dan  $V_0 < V_1$ . Nilai  $V_0$  maupun  $V_1$  lebih besar dari nol,  $a$  dan  $b$  adalah parameter dengan orde fm.

### D. Review Metode Nikiforov Uvarov

Metode Nikiforof-Uvarov (NU) adalah metode yang dikembangkan oleh Nikiforof-Uvarov. Metode NU ini didasari pereduksian Persamaan diferensial orde dua menjadi Persamaan umum diferensial orde dua tipe Hipergeometri. Persamaan diferensial Hipergeometri, yang dapat diselesaikan dengan metode Nikiforov-Uvarov memiliki bentuk (Rajabi dan Hamzavi, 2013):

$$\frac{d^2 \psi(s)}{ds^2} + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \frac{d\psi(s)}{ds} + \frac{\bar{v}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0 \quad (12)$$

dimana  $\sigma(s)$  dan  $\bar{v}(s)$  merupakan polinomial berderajat dua, dan  $\tau(s)$  merupakan polinomial berderajat satu. Persamaan (12) dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel yaitu :

$$\psi = \phi(s) y(s) \quad (13)$$

Persamaan (12) dapat direduksi dengan mensubstitusikan nilai  $\psi$  pada persamaan (13), sehingga diperoleh:

$$\sigma(s) \frac{d^2 \psi(s)}{ds^2} + \tau(s) \frac{d\psi(s)}{ds} + \lambda \psi(s) = 0 \quad (14)$$

Persamaan (14) yang ekuivalen dengan Persamaan (12). Parameter-parameter dalam metode Nikiforov Uvarov, yaitu  $\pi$  dan parameter  $\lambda$  didefinisikan sebagai:

$$\pi = \left( \frac{\sigma' - \tau}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma' - \tau}{2} \right)^2 - \bar{v} + j} \quad (15)$$

$$\lambda = j + \pi'(s) \quad (16)$$

Harga  $j$  pada Persamaan (16) dapat diperoleh dari kondisi bahwa pernyataan kuadrat dibawah akar merupakan kuadrat sempurna dari polinomial derajat satu, sehingga diskriminan dibawah akar harus nol.

Eigen nilai dari persamaan (14) dinyatakan sebagai:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' \quad (17)$$

dengan  $n = 0, 1, 2, \dots$  dan  $\tau = \bar{\tau} + 2\pi$

Untuk mendapatkan energi eigen nilai dan fungsi eigen yang terkait, diperlukan kondisi  $\tau' < 0$ . Solusi bagian pertama dari fungsi gelombang diperoleh dengan persamaan:

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\pi}{\sigma} \quad (19)$$

Solusi bagian kedua fungsi gelombang  $y_n(s)$  yang bersesuaian dengan relasi Rodrigues ditunjukkan oleh persamaan berikut:

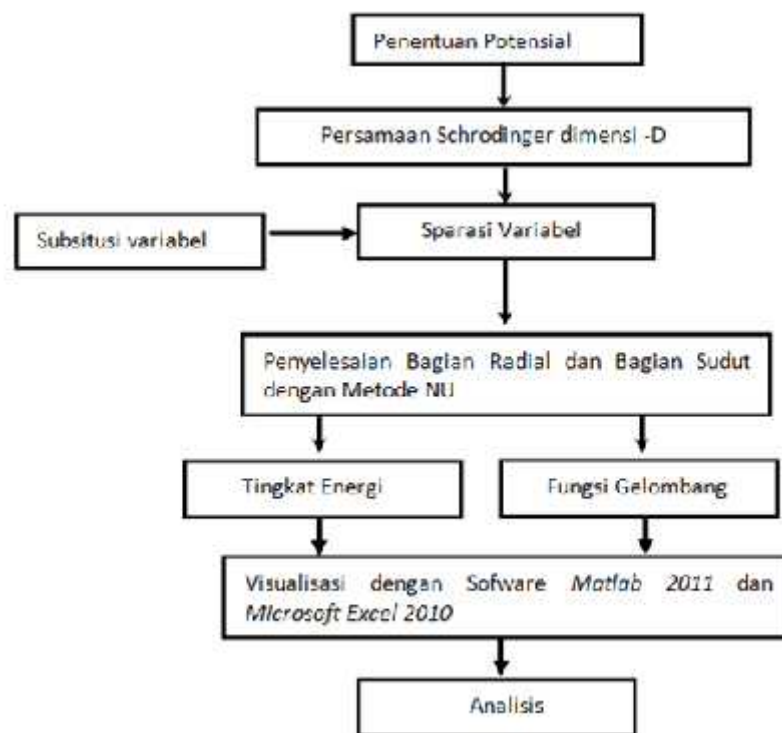
$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (20)$$

dimana  $C_n$  merupakan konstanta normalisasi, dan fungsi bobot  $\rho(s)$  harus tergantung pada kondisi

$$\frac{\partial(\sigma')}{\partial s} = \tau(s)\rho(s) \quad (21)$$

## II METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian analitik, dimana potensial yang diuji, dalam hal ini potensial Eckart plus Manning Rosen dimensi-D. Alur penelitian ini sebagai berikut digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 1. Alur penelitian

Keterangan gambar:

- Memilih potensial yang diujikan, yaitu potensial Eckart plus Manning Rosen
- Salah satu kombinasi potensial uji dari poin a disubstitusikan dalam Persamaan Schrödinger D-dimensi, selanjutnya dipisahkan bagian radial dengan bagian sudut, kemudian direduksi menjadi Persamaan bentuk Persamaan diferensial orde 2 (dua) tipe Hypergeometri
- Masing-masing koefisien dari Persamaan diferensial orde (2) tipe hipergeometri hasil penyelesaian Persamaan Schrodinger dimensi -D dibandingkan dengan koefisien Persamaan (10), sehingga diperoleh nilai  $\sigma$ ,  $\sigma'$ ,  $\bar{\tau}$  dan  $\bar{\sigma}$
- Nilai  $\pi$  ditentukan berdasarkan parameter  $\sigma$ ,  $\sigma'$ ,  $\bar{\tau}$  dan  $\bar{\sigma}$  yang diperoleh dari langkah poin b dengan mensubstitusikan pada Persamaan (14)
- Nilai  $\tau$  ditentukan berdasarkan parameter  $\bar{\tau}$  dari langkah poin c dan nilai  $\pi$  dari langkah poin d dengan mensubstitusikan pada Persamaan (18)
- Nilai  $\lambda$  ditentukan berdasarkan nilai  $j$  yang diperoleh dari langkah poin d dan turunan pertama dari nilai  $\pi$  dari langkah poin d dengan mensubstitusikan pada Persamaan (16)
- Nilai  $\lambda_n$  diperoleh dari turunan pertama  $\tau$  dari langkah poin d dan turunan kedua yang diperoleh dari parameter  $\sigma$  dari langkah poin c, dengan mensubstitusikan pada Persamaan (17)

- h. Persamaan energi diperoleh dengan menyamakan nilai  $\lambda = \lambda_n$  pada bagian radial, sedangkan pada bagian sudut diperoleh Persamaan bilangan kuantum orbital  $l$
- i. Fungsi gelombang bagian radial maupun bagian sudut ditentukan dengan persamaan (19) dan formula Rodrigues pada Persamaan (20)
- j. Tingkat energi dan fungsi gelombang radial divisualisasikan dengan Microsoft Excel 2010 dan Matlab 2013
- k. Melakukan analisis pengaruh parameter terhadap tingkat energi dan fungsi gelombang radial

### III HASIL PENELITIAN

Penyelesaian persamaan Schrodinger dimensi-D dapat dilakukan dengan menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Persamaan Schrodinger dimensi-D dengan potensial Eckart plus Manning Rosen dipisahkan variable bagian radial dan bagian sudut terlebih dahulu yang selanjutnya masing-masing variabel direduksi menjadi Persamaan differensial orde 2 (dua) tipe Hipergeometri. Bagian pertama dan kedua dari fungsi gelombang diselesaikan dengan menggunakan Persamaan (20) dan Persamaan (21). Bentuk penyelesaian merupakan persamaan tingkat energi dan fungsi gelombang. Pemisahan variable dari potensial Eckart plus Manning Rosen pada persamaan Schrodinger dimensi-D diperoleh bagian radial sebagai :

$$\frac{1}{R(r)} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} (R(r)) \right) r^{-2} - \left( \frac{V_0 e^{-r/a}}{(1-e^{-r/a})^2} - V_1 \frac{1+e^{-ra}}{1-e^{-ra}} + \varepsilon 2r \right) = l(l+D-2) \quad (22)$$

Persamaan (22) dibagi dengan  $r^2$  dan dikalikan dengan  $R(r)$ , dimana nilai  $R(r) = r^{(D-1)/2} \chi(r)$  maka diperoleh

$$\frac{1}{r^{D-1}} \left( r^{(D-1)} \frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} - \frac{(D-1)(D-3)}{4} r^{(D-3)} \chi(r) \right) - \frac{l(l+D-2)}{r^2} r^{-(D-1)} \chi(r) - \left( \frac{V_0 e^{-r/a}}{(1-e^{-r/a})^2} - \frac{V_1 (1+e^{-r/a})}{(1-e^{-r/a})} + \varepsilon 2r - D - 12 \right) \chi(r) = 0 \quad (23)$$

Persamaan (23) jika dikalikan dengan  $r^{(D-1)/2}$ , dan potensial Eckart diubah dalam bentuk  $V = \frac{V_0}{[2s] h(\frac{r}{2a})^2} - V_1 \frac{1}{h(\frac{r}{2a})}$  maka diperoleh :

$$\frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} - \left[ \frac{(l+\frac{D-1}{2})(l+\frac{D-3}{2})}{r^2} \right] \chi(r) - \left( \frac{V_0}{[2s] h(\frac{r}{2a})^2} - V_1 \coth(r/2a) + \varepsilon 2r \right) \chi(r) = 0 \quad (24)$$

Untuk  $r \ll 1$  maka  $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{4a^2} \left( d_0 + \frac{1}{s} h^2 \left( \frac{r}{2a} \right) \right)$  dimana  $d_0 = \frac{1}{4}$

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan (24) dengan mensubstitusikan  $\tilde{c} = h \left( \frac{r}{2a} \right) = s$ , sehingga diperoleh persamaan diferensial orde dua tipe hypergeometri, yaitu :

$$\frac{d^2 \chi(s)}{ds^2} - \frac{2s}{(1-s^2)} \frac{d\chi(s)}{ds} - \left[ \frac{(l+\frac{D-1}{2})(l+\frac{D-3}{2}) d_0 + 4a^2 \varepsilon^2}{(1-s^2)^2} - \frac{l+D-12l+D-321-s21-s22-V_0 a21-s21-s22-4a2V_1 s1-s22}{\chi s} \right] \chi(s) = 0 \quad (25)$$

Persamaan (25) merupakan persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan metode Nikiforov-Uvarov (NU) yang disajikan oleh persamaan (12), dimana :

$$\bar{\tau}(s) = -2s$$

$$\sigma(s) = (1-s^2), \text{ maka } \sigma'(s) = -2s$$

$$\bar{\omega}(s) = - \left[ \left( l + \frac{D-1}{2} \right) \left( l + \frac{D-3}{2} \right) d_0 + 4a^2 \varepsilon^2 - \frac{l+D-12l+D-321-s2-V_0}{a21-s2-4a2V_1 s} \right] \chi(s) \quad (28)$$

Masing-masing parameter pada persamaan (26), persamaan (27) dan persamaan (28) disubstitusikan

dalam persamaan (15), sehingga diperoleh nilai

$$\pi = \pm \sqrt{\left( \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 \cdot k \right) s^2 - 4a^2 V_1 s + \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) d_0 + 4a^2 \varepsilon^2 - \left( \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 \cdot j \right)} \tag{29}$$

Harga  $j$  pada Persamaan (29) dapat diperoleh dari kondisi bahwa pernyataan kuadrat di bawah akar merupakan kuadrat sempurna dari polinomial derajat satu sehingga determinan dari persamaan dibawah akar sama dengan nol, sehingga:

$$(4a^2 V_1)^2 - 4 \left( \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 - \frac{1}{4} (l + D - 12l + D - 32d_0 + 4a^2 \varepsilon^2 - l + D - 12l + D - 32 + V_0 a^2 - j) \right) = 0 \tag{30}$$

Dengan memisalkan  $p^2 = \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 - j$ , maka nilai  $k$  pada persamaan (29) dapat diperoleh yaitu suatu kondisi dibawah akar persamaan (30) merupakan kuadrat sempurna dari polinomial derajat satu sehingga diskriminan persamaan kuadrat dibawah akar harus bernilai nol.

$$j = \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 - p^2 \tag{31}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (31) ke persamaan (29), maka nilai  $\pi$  dapat dituliskan sebagai :

$$\pi = \pm p \left( s - \frac{4a^2 V_1}{2p^2} \right) \tag{32}$$

Secara umum, nilai  $\lambda_1 = \lambda_2$  dapat dituliskan sebagai :

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 - p^2 - p \tag{33}$$

Energi eigen nilai dan eigen fungsi dapat diperoleh kondisi bahwa  $\tau' < 0$ , sehingga nilai  $\pi$  diambil negatif.

$$\lambda = k + \pi' \\ \lambda = \left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 - p^2 - p \tag{35}$$

$$\text{Nilai eigen baru } \lambda_{n_r} = -n_r \tau' - \frac{n_r(n_r-1)}{2} \sigma'' \\ \lambda_{n_r} = 2n_r(p+1) + n_r(n_r+1) = 2n_r p + n_r^2 + n_r \tag{37}$$

Tingkat Energi dari potensial Eckart plus Manning Rosen dimensi D diperoleh dengan menyamakan nilai eigen baru  $\lambda = \lambda_{n_r}$  dari persamaan (33) dan persamaan (37) sehingga diperoleh :

$$E_{n_r} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\left( \sqrt{\left(1 + \frac{D-1}{2}\right) \left(1 + \frac{D-3}{2}\right) + V_0 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \right)^2}{4a^2} + \frac{a^2 V_1 2l + D - 12l + D - 32 + V_0 a^2 + 122 + n_r + 122 - l + D - 12l + D - 32 d_0 a^2}{4a^2} \right] \tag{38}$$

Pada kondisi khusus (D=3), maka tingkat energi untuk potensial Eckart plus Manning Rosen dimensi D adalah:

$$E_{n_r} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\left( \sqrt{l(l+1) + V_0 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \right)^2}{4a^2} + \frac{a^2 V_1 2ll + 1 + V_0 a^2 + 122 + n_r + 122 - ll + 1 d_0 a^2}{4a^2} \right] \tag{39}$$

Fungsi gelombang radial dari potensial Eckart plus Manning Rosen, langkah pertama adalah menentukan fungsi gelombang bagian pertama yang diperoleh dari persamaan (19), sehingga diperoleh:

$$\phi = (1+s)^{\frac{(p+1)}{2}} (1-s)^{-\frac{(p+1)}{2}} \tag{40}$$

Persamaan gelombang bagian kedua diperoleh dengan menentukan fungsi bobot  $\rho$ , yang diperoleh dengan mensubstitusikan parameter persamaan (25) pada persamaan (19), sehingga diperoleh

$$\rho = (1+s)^{\frac{2a^2 V_1 + p}{2}} (1-s)^{-\frac{2a^2 V_1 + p}{2}} \tag{41}$$

Solusi bagian kedua fungsi gelombang  $y_n(s)$  yang bersesuaian dengan relasi Rodrigues ditunjukkan oleh

Persamaan (20) dengan fungsi bobot pada Persamaan (21), sehingga diperoleh:

$$y_n = C_n (1+s)^{-\frac{2a^2 V_1 + p}{2}} (1-s)^{\frac{2a^2 V_1 + p}{2}} \frac{d^n}{ds^n} \left\{ (1-s)^{2n+1} s^{2n+1} \right. \\ \left. + s^2 2V_1 p + p^2 - s - 2a^2 V_1 p + p \right\} \tag{42}$$

Persamaan (42) merupakan Polinomial Jacobi dalam bentuk :

$$P_n^{\alpha, \beta} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} (1-z)^\alpha (1+z)^\beta (1-z^2)^n \tag{43}$$

Sehingga dapat dituliskan  $y_n = (-1)^n 2^n n! P_n^{\alpha, \beta}(s) = E_n P_n^{\alpha, \beta}(s)$  dengan

$$\alpha = -\left(\frac{2u^2 V_1}{p}\right) + p \text{ dan } \beta = \left(\frac{2u^2 V_1}{p}\right) + p \quad (44)$$

Fungsi gelombang radial secara lengkap dapat diperoleh dari persamaan (40) dan persamaan (42), dimana  $\chi_n = \phi(s) y(s)$ ,  $R_n = r^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)} \chi(r)$  dan  $\coth\left(\frac{r}{2au}\right) = s$ , maka diperoleh:

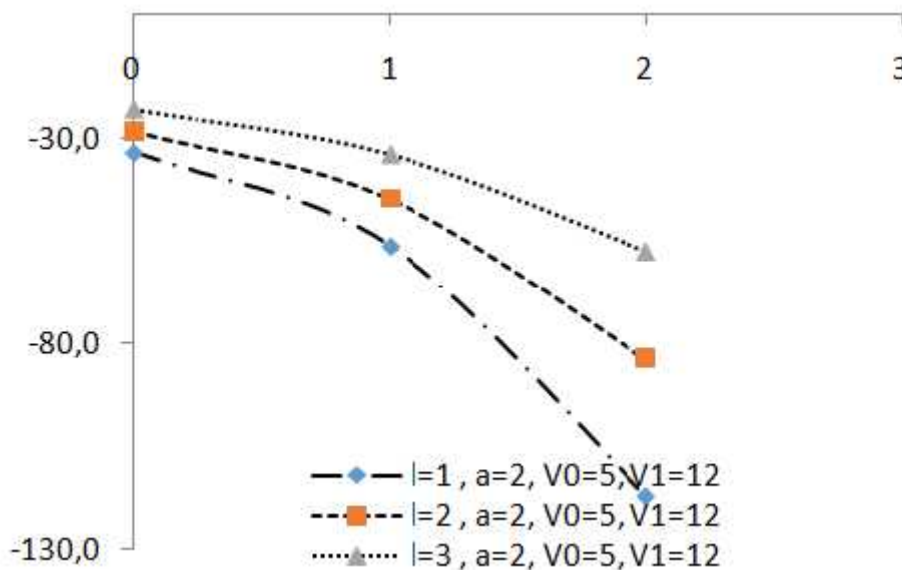
$$R_n = E_n r^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)} \left(1 - c_1 h^2 \left(\frac{r}{2au}\right)\right)^{\frac{E}{2}} \left(1 + \coth r 2u \sqrt{1-pu^2} - 1 - \coth r 2u - \sqrt{1-pu^2} F_n \alpha, \beta \coth r 2u\right) \quad (45)$$

Hasil perhitungan tingkat energi akibat pengaruh bilangan kuantum orbital untuk  $D=3, a=2, V_0=5, d=5, V_1=12$  dapat dilihat pada tabel 1 dibawah ini:

Tabel 1. Pengaruh bilangan kuantum orbital terhadap tingkat energi

$l$	$n_r$	$E_{n_r}$
0	0	-33.49
	1	-56.29
	2	-117.49
1	0	-28.25
	1	-44.66
	2	-84.09
2	0	-23.09
	1	-34.01
	2	-57.57

Visualisasi tingkat energi untuk potensial Eckart plus Manning Rosen dimensi-D akibat pengaruh bilangan kuantum orbital terlihat pada gambar 2 dibawah ini:



Gambar 2. Pengaruh dimensi terhadap tingkat energi

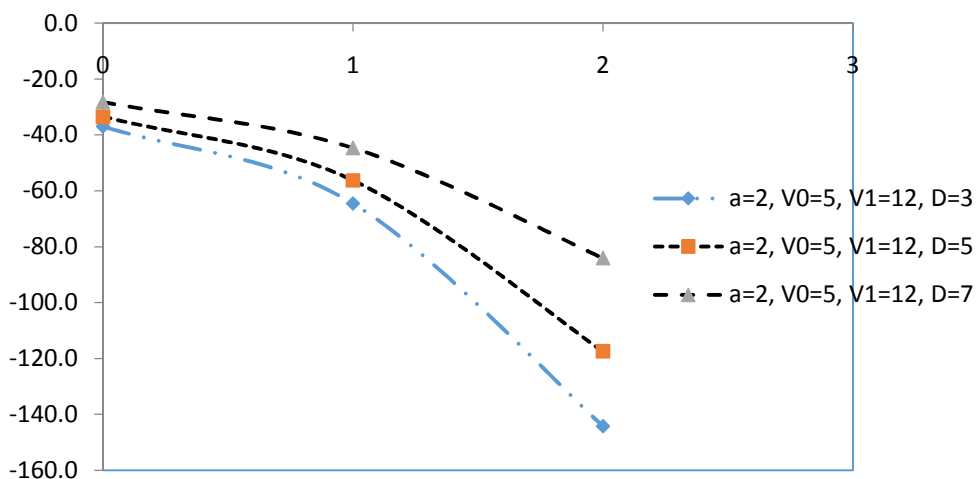
Berdasarkan tabel 1 dan Gambar 2 dapat ditunjukkan bahwa bilangan kuantum semakin besar bilangan kuantum orbital, maka tingkat energi ke-n untuk potensial Eckart plus Manning Rosen akan menuju nilai nol. Hal ini menunjukkan semakin besar bilangan kuantum orbital pada tingkat energi ke-n, ikatan semakin lemah.

Hasil perhitungan tingkat energi akibat pengaruh dimensi untuk  $l=0, a=2, V_0=5, d=5, V_1=12$  dapat dilihat pada tabel 2 dibawah ini:

Tabel 2. Pengaruh bilangan kuantum orbital terhadap tingkat energi

$D$	$n_r$	$E_{n_r}$
3	0	-37.00
	1	-64.56
	2	-144.25
5	0	-33.49
	1	-56.29
	2	-117.49
7	0	-28.25
	1	-44.66
	2	-84.09

Visualisasi tingkat energi untuk potensial Eckart plus Manning Rosen dimensi-D akibat pengaruh dimensi terlihat pada gambar 3 dibawah ini:



Gambar 3. Pengaruh dimensi terhadap tingkat energi

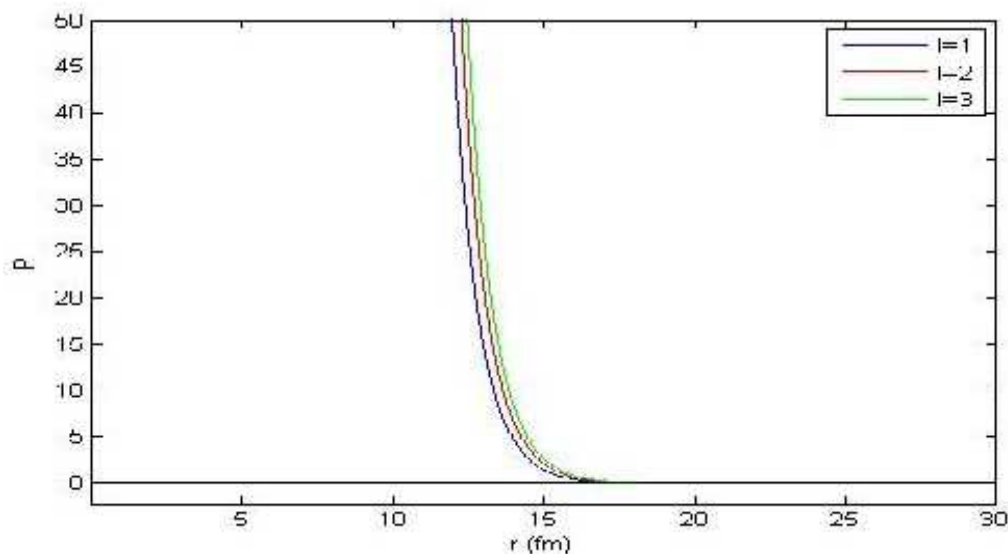
Berdasarkan tabel 2 dan Gambar 3 dapat ditunjukkan bahwa semakin besar dimensi-D, maka tingkat energi ke-n untuk potensial Eckart plus Manning Rosen semakin menuju ke nol. Hal ini menunjukkan semakin besar pengaruh dimensi pada tingkat energi ke-n, maka energi ikatnya semakin melemah.

Fungsi gelombang radial dari potensial Eckart plus Manning Rosen yang diperoleh menunjukkan

kebolehjadian ditemukannya partikel pada kondisi tertentu.

Visualisasi gelombang radial dalam bentuk rapat probabilitas untuk pengaruh bilangan kuantum orbital pada tingkat dasar digambarkan sebagai berikut (Gambar 4).

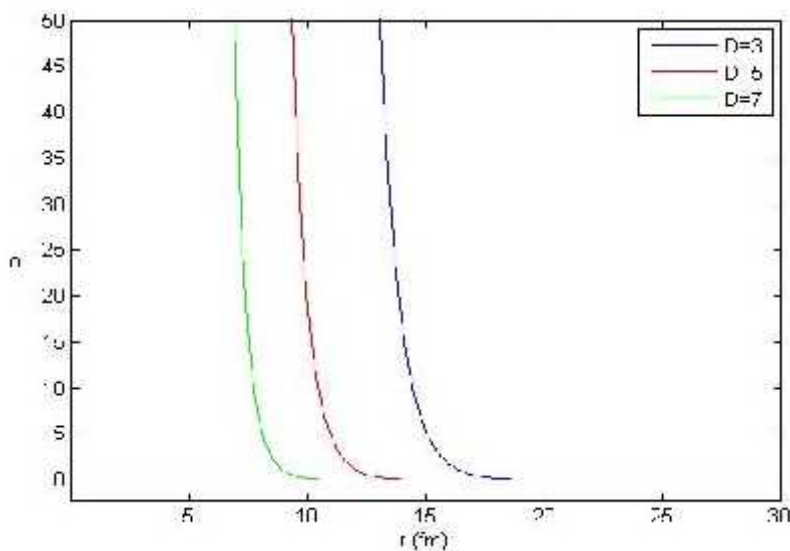




Gambar.4 Rapat probabilitas akibat pengaruh bilangan kuantum orbital pada tingkat dasar

Berdasarkan Gambar 4, semakin besar bilangan kuantum orbital, rapat probabilitas semakin bergeser ke kanan. Hal ini menunjukkan untuk tingkat dasar, kemungkinan ditemukan partikel semakin kecil jika bilangan kuantum orbitalnya semakin besar.

Visualisasi gelombang radial dalam bentuk rapat probabilitas untuk pengaruh dimensi pada tingkat dasar digambarkan sebagai berikut (Gambar 5).



Gambar 5. Rapat probabilitas akibat pengaruh dimensi pada tingkat dasar

Berdasarkan Gambar 5, semakin besar dimensi, rapat probabilitas semakin bergeser ke kiri. Hal ini menunjukkan untuk tingkat dasar, kemungkinan ditemukan partikel semakin besar jika dimensi semakin besar.

### III KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan visualisasi, maka dapat disimpulkan:

1. Tingkat energi dan fungsi gelombang dari potensial Eckart plus Manning Rosen dimensi-

D dapat diselesaikan dengan metode Nikiforov Uvarov

2. Pengaruh bilangan kuantum orbital terhadap tingkat energi ke-n adalah semakin besar bilangan kuantum orbital energi ikat pada potensial Eckart plus Manning Rosen semakin lemah dan fungsi gelombang (rapat probabilitas) semakin kecil.
3. Pengaruh dimensi terhadap tingkat energi ke-n adalah semakin besar dimensi energi ikat pada potensial Eckart plus Manning Rosen semakin lemah dan fungsi gelombang (rapat probabilitas) semakin besar.

#### UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan dosen program studi Pendidikan Fisika Universitas Palangka Raya atas motivasi dan saran dalam pengembangan keilmuan.

#### DAFTAR PUSTAKA

1. Cari and Suparmi. (2012). "Approximate Solution of Schrodinger Equation for Hulthen Potential plus Eckart Potential with Centrifugal Term in terms of Finite Romanovski Polynomials". International Journal of Applied Physics and Mathematics, Vol. 2, No. 3
2. Deta, Suparmi and Cari.(2013). " Approximate Solution of Schrödinger Equation in D-Dimensions for Scarf Hyperbolic Potential Using Nikiforov-Uvarov Method" Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 7, 2013, no. 13, 647 - 656
3. Dong, S.H.(2011). *Wave Equations in Higher Dimensions*. Heidelberg London New York : Springer
4. Hassanabadi, H., Lu, L.L., Zarrinkamar, S., Liu, G.H., Rahimov, H. (2012). "Approximate Solutions of Schrodinger Equation under Manning\_Rosen Potential in Arbitrary Dimension via SUSYQM". ACTA PHYSICA POLONICA A Vol.122 no.4
5. Ikhdair, S.M and Sever, R. (2008). "Approximate l-state solutions of the D-dimensional Schrodinger equation for Manning-Rosen potential". Journal of Quantum Physics 08013518 Vol.1
6. Ikot, A. N. and Akpabio, L. E. (2010). "Approximate Solution of the Schrödinger Equation with Rosen-Morse Potential Including the Centrifugal Term". Applied Physics Research, Vol. 2 No. 2, pp. 202-208
7. Rajabi, A.A and Hamzavi, M. (2013). "A new Coulomb ring-shaped potential via generalized parametric Nikiforov-Uvarov method". Journal of Theoretical and Applied Physics. Springer open Journal
8. Siregar, R.E. *Teori dan Aplikasi Fisika Kuantum: Widya Padjadjaran*, 2010
9. Suparmi. 2011. *Mekanika Kuantum II*. Surakarta : FMIPA UNS
10. Vahidi, V, and Gourdarzi, H. (2011). "Supersymmetric Approach for Eckart Potential Using the NU Method". Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 5, no. 10, 469 – 476